全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学2

北京专版

必修第二册 RJA

天津出版传媒集团

天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

06 第六章　平面向量及其应用

PART SIX

07 第七章　复数

PART SEVEN

08 第八章　立体几何初步

PART EIGHT

09 第九章　统计

PART NINE

10 第十章　概率

PART TEN

第六章　平面向量及其应用

6.1　平面向量的概念

6.1.1　向量的实际背景与概念

6.1.2　向量的几何表示

6.1.3　相等向量与共线向量

【学习目标】

1. 通过对力、速度、位移等的分析，了解平面向量的实际背景，理解平面向量、零向量、向量的模、单位向量、平行向量(共线向量)的意义和两个向量相等的含义.

2. 能够在熟悉的实际问题情境中，理解平面向量的几何表示和基本要素.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量的概念

1. 向量：既有________又有________的量叫作向量.

2. 数量：只有________没有________的量称为数量.

注：①看一个量是否为向量，就要看它是否具备了大小和方向两个要素.

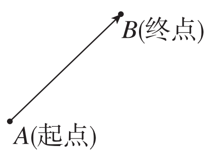
②向量与数量的区别：数量与数量之间可以比较大小，而向量与向量之间不能比较大小.

◆ 知识点二　向量的几何表示

1. 有向线段

(1)有向线段：具有________的线段叫作有向线段.

(2)表示方法：以 A 为起点，B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$，如图.



(3)有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度：线段 AB 的长度也叫作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

(4)有向线段包含三个要素：________________.

2. 向量的表示方法

(1)向量的几何表示：向量可以用有向线段来表示，有向线段的________表示向量的大小，有向线段的________表示向量的方向. 如 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$.

(2)向量的字母表示：向量可以用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示，书写时，用带箭头的小写字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…表示.

3. 向量的相关概念

(1)向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的________(或称模)，记作________.

(2)零向量：长度为________的向量叫作零向量，记作________.

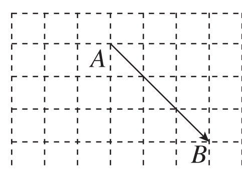
(3)单位向量：长度等于____________的向量叫作单位向量.

【诊断分析】1. 给出下列物理量：

①质量；②角度；③弹力；④速度.

其中可以看成是向量的是________.(填序号)

2. 在如图的方格纸上，每个小正方形的边长为 1，则 $|\overrightarrow{AB}|=$________.



3. 0 与 $\mathbf{0}$ 有什么区别和联系?

◆ 知识点三　相等向量与共线向量

1. 平行向量：方向____________的__________叫作平行向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作________. 规定：零向量与任意向量平行.

2. 相等向量：长度________且方向________的向量叫作相等向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

3. 共线向量：任一组____________都可以平移到同一条直线上，因此，平行向量也叫作____________.

注：1. 要注意避免向量平行和共线与平面几何中直线、线段的平行和共线相混淆.

(1)零向量的方向是任意的,注意 $\mathbf{0}$ 与 0 的含义与书写区别;

(2)平行向量可以在同一直线上,要区别于两条平行线的位置关系;

(3)共线向量与相等向量的关系:相等向量一定是共线向量,但共线向量不一定是相等向量.

2. 用共线(平行)向量或相等向量刻画几何关系

(1)利用向量的模相等可以证明线段相等,利用向量相等可以证明线段平行且相等;

(2)利用向量共线可以证明直线与直线平行,但需说明向量所在的直线无公共点;

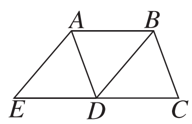
(3)利用向量可以判断图形的形状(如平行四边形、等腰三角形、梯形等)、证明多点共线等.

3. 平行向量有关概念的两个注意点

(1)相等向量具有传递性,非零向量的平行也具有传递性;

(2)共线向量即为平行向量,它们均与起点无关.

【诊断分析】 如图所示,已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABDE$ 都是平行四边形.



(1)图中与向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线的向量有__________;

(2)图中与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有__________.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量的基本概念

例 1 (1)下列说法正确的是　(　　)

A. 数量可以比较大小,向量也可以比较大小

B. 向量的模可以比较大小

C. 模为 1 的向量都是相等向量

D. 因为零向量的方向不确定,所以零向量不与任意向量平行

(2)给出下列物理量:

①密度;②温度;③加速度;④质量;⑤功;⑥位移.

下列说法正确的是　(　　)

A. ①②③是数量,④⑤⑥是向量

B. ②④⑥是数量,①③⑤是向量

C. ①④是数量,②③⑤⑥是向量

D. ①②④⑤是数量,③⑥是向量

[素养小结]

解决与向量概念有关问题的方法

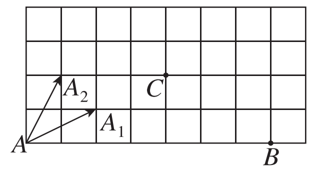
解决与向量概念有关问题的关键是突出向量的核心——方向和长度,如:单位向量的核心是方向没有限制,但长度都是一个单位长度;零向量的核心是方向没有限制,长度是 0;规定零向量与任意向量共线.只有紧紧抓住概念的核心才能顺利解决与向量概念有关的问题.

◆ 探究点二　向量的几何表示

例 2 如图是中国象棋的半个棋盘示意图,“马走日”是象棋中“马”的走法,“马”可从 A 跳到 A_1,也可从 A 跳到 A_2,用向量 $\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AA_2}$ 表示“马”走了“一步”,试在图中画出:

(1)“马”从 A 处走到 B 处的一种情况;

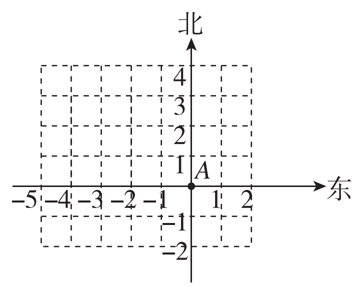
(2)“马”在 C 处走了“一步”的所有情况.



变式 如图,某人从点 A 出发,向西走了 200 m 后到达 B 点,然后改变方向,沿北偏西一定角度的某方向行走了 $200\sqrt{3}$ m 到达 C 点,最后又改变方向,向东走了 200 m 到达 D 点,发现 D 点在 B 点的正北方向.

(1)作出 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$(图中 1 个单位长度表示 100 m);

(2)求 $\overrightarrow{DA}$ 的模.



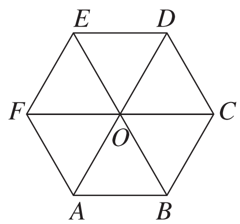
[素养小结]

1. 在画图时,向量是用有向线段来表示的,用有向线段的长度表示向量的大小,用箭头所指的方向表示向量的方向. 应该注意的是有向线段是向量的表示,并不是说向量就是有向线段.

2. 作向量的方法:先确定向量的起点,再确定向量的方向,然后根据向量的大小确定向量的终点.

◆ 探究点三　相等向量与共线向量

例 3 如图,在正六边形 $ABCDEF$ 中,点 O 为其中心,则下列结论错误的是　(　　)



A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DE}$

C. $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BE}|$

D. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FC}$

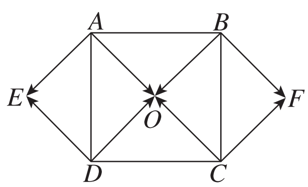
例 4 如图所示,点 O 为正方形 $ABCD$ 对角线的交点,四边形 $OAED$,$OCFB$ 都是正方形. 在图中所示的向量中:

(1)分别写出与 $\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{BO}$ 相等的向量.

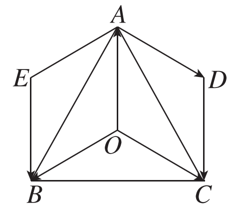
(2)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量.

(3)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量.

(4)向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等?



变式 如图所示,O 是正三角形 ABC 的中心,四边形 $AOCD$ 和四边形 $AOBE$ 均为平行四边形.



(1)与向量 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量有________;

(2)与向量 $\overrightarrow{OA}$ 相反的向量有________;

(3)与向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模相等的向量有____________.(填图中所画出的向量)

[素养小结]

判断一组向量是否相等,关键是看这组向量是否方向相同,长度相等,与起点和终点的位置无关. 判断一组向量是否共线,只需判断它们是否同向或反向.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 下列量中是向量的为　(　　)

A. 频率　　B. 拉力

C. 体积　　D. 距离

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,$\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{BO}$ 分别是与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量,则以下各式正确的是　(　　)

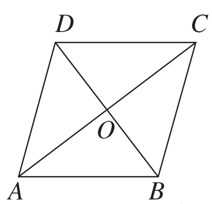
A. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$

B. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$ 或 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$

C. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$

D. $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{BO}$ 的长度相等

3. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,则图中相等的向量是　(　　)



A. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$　　B. $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$

4. 下列说法正确的是　(　　)

A. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

B. 长度相等的向量叫相等向量

C. 零向量的长度是 0

D. 共线向量一定是在同一条直线上的向量

5. 某人从点 A 出发向正东方向行进 100 m 后到达点 B,再向正南方向行进 $100\sqrt{3}$ m 后到达点 C,则此人位移的方向是________.

6.2　平面向量的运算

6.2.1　向量的加法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量加法运算及运算规则，并理解其几何意义，会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作出两个向量的和.

2. 能够在数学问题情境中，掌握向量加法的交换律与结合律，并会用它们进行向量运算.

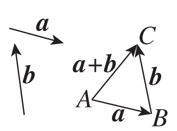
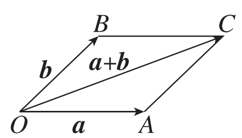
课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量加法的定义及运算法则

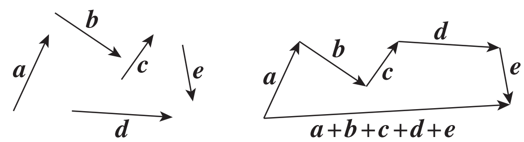
1. 向量加法的定义

求______________的运算，叫作向量的加法.

2. 向量加法的运算法则

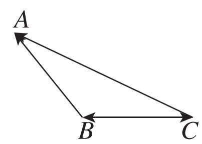
	三角形法则	平行四边形法则
前提	已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$	已知不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$
作法	在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=$________	作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OB 为邻边作 $\square OACB$，连接 OC，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$
结论	向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
图形		
特例	对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$，我们规定________$=$________$=$________	
三角不等式	$\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert+\lvert\boldsymbol{b}\rvert$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量时，等号成立	
物理模型	位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型，力的合成可以看作向量加法平行四边形法则的物理模型	

（续表）

	三角形法则	平行四边形法则
多个向量相加	为了得到有限个向量的和，只需将这些向量依次首尾相接，那么以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点的向量，就是这些向量的和，如图所示 	

【诊断分析】1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 表示“向东航行 1 km”，向量 $\boldsymbol{b}$ 表示“向南航行 1 km”，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示什么？

2. 如图所示，试分别作出向量 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.



◆ 知识点二　向量加法的运算律

运算律	交换律	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________
	结合律	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$____________

【诊断分析】化简：

(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}$；

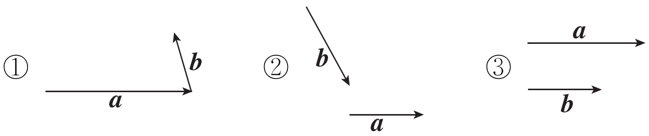
(2)$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FA}$.

课中探究

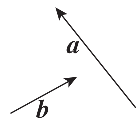
考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量加法的三角形法则与平行四边形法则

例 1 (1)如图,已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,用向量加法的三角形法则作出①②③中的向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



(2)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$(如图),请用向量加法的平行四边形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



变式 如图所示,O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心,化简下列各式:

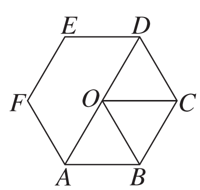
(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$________;

(2)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=$________;

(3)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OD}=$________;

(4)$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{FE}=$________;

(5)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=$________.



[素养小结]

(1)在使用向量加法的三角形法则时,要注意"首尾相接",即若第一个向量的终点与第二个向量的起点重合,则以第一个向量的起点为起点,并以第二个向量的终点为终点的向量为两向量的和,适用于任何非零向量求和.

(2)向量加法的平行四边形法则的应用前提是"共起点",即两个向量是从同一点出发的不共线向量,仅适用于不共线的两个向量求和.

(3)向量加法的三角形法则作出的图形是平行四边形法则作出的图形的一半.

拓展 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$?

◆ 探究点二　向量的加法运算及运算律

例 2 化简:(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$;

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$;

(3)$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$;

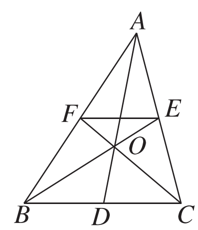
(4)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}$.

变式 如图,在△ABC 中,D,E,F 分别是 BC,AC,AB 的中点,O 为 AD,BE,CF 的交点,化简下列各式:

(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$;

(2)$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$;

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}$.



[素养小结]

解决向量的加法运算问题时应注意两点:

(1)可以利用向量的几何表示,画出图形进行化简或计算.

(2)要灵活应用向量加法的运算律,注意各向量的起、终点及向量起、终点字母的排列顺序,特别注意勿将 $\mathbf{0}$ 写成 0.

拓展 已知点 O 为△ABC 外接圆的圆心,且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,则△$ABC$ 的内角 A 等于________.

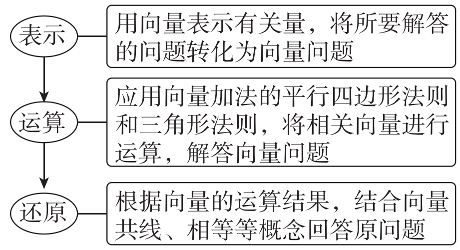
◆ 探究点三　向量加法的实际应用

例 3　一条河的宽度为 800 m,一艘船从 A 处出发垂直到达河正对岸的 B 处,船航行的速度大小为 20 km/h,水流的速度大小为 12 km/h,则船到达 B 处需要多长时间?

变式　一架救援直升飞机从 A 地沿北偏东 60°方向飞行了 40 km 到达 B 地,再由 B 地沿正北方向飞行 40 km 到达 C 地,求此时直升飞机与 A 地的相对位置.

[素养小结]

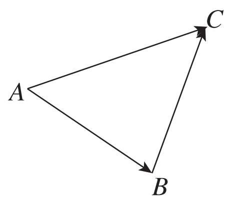
应用向量解决实际问题的基本步骤



课堂评价

知识评价　素养形成

1. 如图,一个人骑自行车由 A 地出发到达 B 地,然后由 B 地出发到达 C 地,则这个人骑行的位移为　(　　)



A. $\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{CA}$

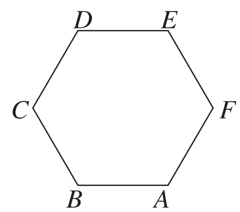
2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}=$　(　　)

A. $\overrightarrow{AE}$　　B. $\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}$　　D. $\overrightarrow{AB}$

3. 设向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AC}=$________.

4. 如图,在正六边形 $ABCDEF$ 中,$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=$________.



5. 已知 O 为四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点,若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$,则四边形 $ABCD$ 的形状为________.

6.2.2　向量的减法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示,掌握平面向量减法运算及运算规则,并理解其几何意义.
2. 会作出两个向量的差.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　相反向量

定义	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度________,方向________的向量,叫作 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记作 $-\boldsymbol{a}$
性质	$-(-\boldsymbol{a})=$________
	零向量的相反向量仍是零向量
	$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=$________
	如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,那么 $\boldsymbol{a}=$________,$\boldsymbol{b}=$________,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________

【诊断分析】下列说法正确的是________.(填序号)

①相反向量就是方向相反的向量;

②向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量;

③$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$,$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

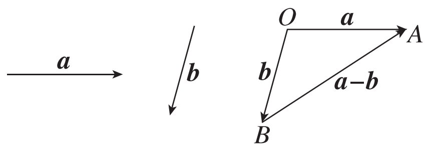
◆ 知识点二　向量的减法及其几何意义

1. 向量减法的定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的____________,叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$____________. 因此减去一个向量,相当于加上这个向量的相反向量. 求两个向量差的运算叫作向量的________.

2. 向量减法的几何意义

如图所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$ ________ $=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即如果把两个向量的起点放在一起，那么 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从____________指向____________的向量.



3. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 之间的关系

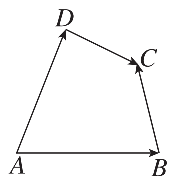
(1)对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，都有 ________ $\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant$ ________；

(2)当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且同向时，有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ ________ 或 ________；

(3)当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且反向时，有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ ________.

【诊断分析】 1. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的差与向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的差互为__________.

2. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则向量 $\overrightarrow{DC}$ 可用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示为________.

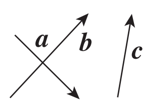


课中探究

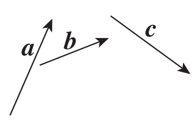
考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量的减法及其几何意义

例 1 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



变式 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



[素养小结]

求作两个向量的差向量的两种思路

(1)可以转化为向量的加法来进行，如 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，可以先作 $\boldsymbol{a}$，$-\boldsymbol{b}$，然后作 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 即可.

(2)也可以直接用向量减法的几何意义，即使两向量的起点重合，则差向量为连接两个向量的终点，指向被减向量的终点的向量.

◆ 探究点二　向量加减法的基本运算

例 2 (1)下列不能化简为 $\overrightarrow{PQ}$ 的是　　(　　)

A. $\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}$

B. $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})$

C. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})$

D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}$

(2)化简：

①$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$；

②$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$.

变式 化简：(1)$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{PQ}=$ ________；

(2)$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$ ________；

(3)$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=$ ________.

[素养小结]

(1)向量减法运算的常用方法

常用方法：
- 可以通过相反向量，把向量的减法运算转化为加法运算
- 运用三角形法则，此时要注意两个向量要有共同的起点
- 引入点O，运用三角形法则，将各向量的起点统一

(2)向量加减法化简的两种形式

①首尾相连且为和；

②起点相同且为差.

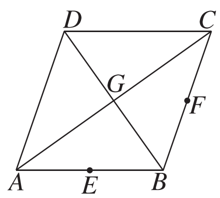
做题时要注意观察是否有这两种形式，同时要注意逆向应用.

◆ 探究点三　向量减法及其几何意义的应用

例 3　如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,E,F 分别为边 AB 和 BC 的中点,G 为 AC 与 BD 的交点.

(1)若 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|$,则四边形 $ABCD$ 是什么特殊的平行四边形?说明理由.

(2)化简 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{EB}$,并在图中作出表示该化简结果的向量.



变式　(1)已知平面内的四边形 $ABCD$ 和点 O,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$,若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$,试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

(2)已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{7}+1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}-1$,且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4$,求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值.

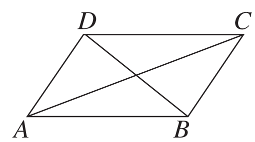
[素养小结]

向量减法的几何意义:两向量相减,表示两向量起点的字母必须相同,这样两向量的差向量以减向量的终点字母为起点字母,以被减向量的终点字母为终点字母.此类问题要根据图形的几何性质,运用向量的平行四边形法则和三角形法则解题,若题目中遇到共起点的向量,则常常创造条件作差,要特别注意向量的方向.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,那么 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ 等于　　(　　)



A. $\overrightarrow{DB}$　　B. $\overrightarrow{CB}$

C. $\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{DC}$

2. 若 O,E,F 是不共线的任意三点,则以下各式中成立的是　　(　　)

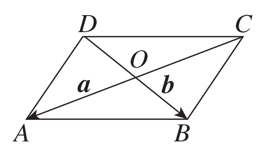
A. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}$

B. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$

C. $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}$

D. $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$

3. 如图,已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{BC}$ 可以表示为　　(　　)



A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　　D. $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

4. 下列等式中正确的个数为________.

①$\boldsymbol{0}-\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

②$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$;

③$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

④$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

⑤$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$;

⑥$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的取值范围为________.

6.2.3 向量的数乘运算

【学习目标】

1. 通过实例分析，掌握平面向量数乘运算及运算规则，理解其几何意义.
2. 理解两个平面向量共线的含义.
3. 了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的数乘运算

1. 向量的数乘的定义

一般地，我们规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个________，这种运算叫作____________，记作________，它的长度与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=$____________；

(2)当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=$________，方向________.

2. 向量数乘的运算律

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量，λ,μ 为实数，那么

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=$________；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=$________；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$________.

特别地，$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a})$，$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 向量的线性运算

(1)向量的____________运算统称为向量的线性运算.

(2)对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，以及任意实数 λ,μ_1,μ_2，恒有 $\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=$____________.

◆ 知识点二 向量共线定理

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是：________一个实数 λ，使________.

【诊断分析】 1. 下列说法正确的是________.（填序号）

①$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致；

②对于任意实数 m 和向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

③若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，则存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；

④若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

2. $\frac{1}{12}[2(2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})-4(4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})]=$________.

3. 向量共线定理中为什么规定 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$?

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 向量的数乘的概念

例 1 (1)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则下列说法中不正确的是 （ ）

A. $2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $2\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 2 倍

B. $-2\boldsymbol{a}$ 与 $5\boldsymbol{a}$ 的方向相反，且 $-2\boldsymbol{a}$ 的模是 $5\boldsymbol{a}$ 的模的 $\frac{2}{5}$

C. $-2\boldsymbol{a}$ 与 $2\boldsymbol{a}$ 是一对相反向量

D. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 是一对相反向量

(2)已知点 C 在线段 AB 的延长线上，且 $AB:AC=2:3$.

①用 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$；②用 $\overrightarrow{CB}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$.

◆ 探究点二 向量的线性运算

例 2 (1)化简：

①$4(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+6(-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=$________；

②$\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})+\frac{2}{15}(2\boldsymbol{a}+13\boldsymbol{b})=$________；

③$\frac{2}{3}\left[(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}(6\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b})\right]=$________.

(2)已知 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{x}$.

变式 (1)化简：$(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$________.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 满足关系式 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$，$-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{x}=$____________，$\boldsymbol{y}=$____________.(用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示)

[素养小结]

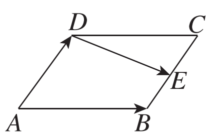
向量线性运算的方法

(1)向量的线性运算类似于多项式的代数运算，实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形手段在向量的线性运算中同样适用，但是这里的“同类项”“公因式”是指向量，实数看作是向量的系数.

(2)向量也可以通过列方程来解，即把所求向量当作未知数，利用解代数方程的方法求解，同时在运算过程中要多注意观察，恰当运用运算律，简化运算.

◆ 探究点三　用已知的向量表示未知的向量

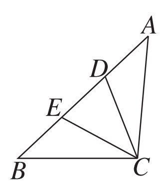
例 3 (1)如图，在▱$ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{DE}$ 等于　(　　)



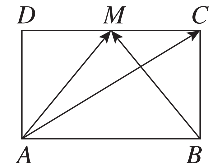
A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

(2)如图，在△ABC 中，D,E 为边 AB 上的三等分点，若 $\overrightarrow{CA}=3\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CE}$.



变式 如图，在矩形 $ABCD$ 中，M 是 CD 的中点，则　(　　)



A. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$

B. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}$

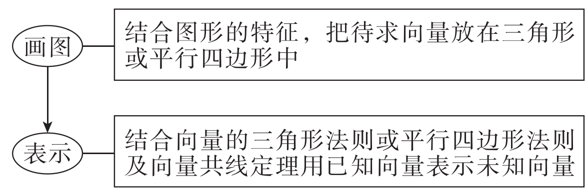
C. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$

D. $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$

[素养小结]

用已知向量表示其他向量的两种方法

(1)直接法

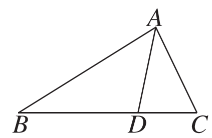


(2)方程法

当直接表示比较困难时，可以首先利用三角形法则和平行四边形法则建立关于所求向量和已知向量的等量关系，然后解关于所求向量的方程.

◆ 探究点四　向量共线定理及其应用

例 4 (1)如图，在△ABC 中，点 D 在线段 BC 上，$BD=2DC$，如果 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，那么　(　　)



A. $x=\frac{1}{3},y=\frac{2}{3}$　　B. $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$

C. $x=-\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$　　D. $x=\frac{1}{3},y=-\frac{2}{3}$

(2)已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不共线的向量，且 $\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

①若 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 的方向相反，求 k 的值；

②若 A,C,D 三点共线，求 k 的值.

变式 (1)已知 A,B,P 三点共线,O 为直线 AB 外任意一点,若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则 $x+y=$ ( )

A. 1 B. $\frac{1}{2}$

C. 2 D. $\frac{1}{3}$

(2)已知向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线,四个不同的点 A,B,C,D 满足 $\overrightarrow{AB}=3(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{CD}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$.若点 A,C,D 共线,则满足条件的一组实数对(x,y)为________.

[素养小结]

1. 证明或判断三点共线的方法

(1)一般来说,要判断 A,B,C 三点是否共线,只需看是否存在实数 λ,使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$(或 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 等).

(2)利用结论:若 A,B,C 三点共线,O 为直线外一点,则存在实数 x,y,使 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ 且 $x+y=1$.

2. 利用向量共线求参数的方法

解决判断、证明向量共线问题的思路是根据向量共线定理寻求唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$.而已知向量共线求 λ,常根据向量共线的条件转化为相应向量系数相等求解.若两向量不共线,则必有向量的系数为零,利用待定系数法建立方程(组),从而解方程(组)求得 λ 的值.

课堂评价 知识评价 素养形成

1. $3(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=$ ( )

A. $5\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$ B. $5\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$

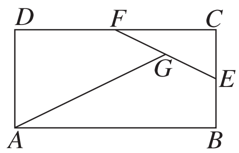
C. $6\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}$ D. $6\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}$

2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量,且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{c}$,则 ( )

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直 B. $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 反向 D. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向

3. [2024·北京二中测试] 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2AD$,E,F 分别为 BC,CD 的中点,G 为 EF 的中点,则 $\overrightarrow{AG}=$ ( )



A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量,若向量 $k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的方向相同,则 $k=$________.

5. 已知 x,y 是实数,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,若$(y-2)\boldsymbol{a}+(x-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $x+y=$________.

6.2.4 向量的数量积

第 1 课时 向量数量积的定义、投影向量

【学习目标】

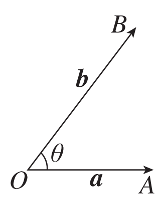
1. 通过物理中"功"等实例,理解平面向量数量积的概念及其物理意义,会计算平面向量的数量积.

2. 通过几何直观,了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义,体会平面向量数量积与投影向量的关系.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的夹角

1. 定义:如图,已知两个____________ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,$O$ 是平面上的任意一点,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\angle AOB=\theta$____________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的________.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角记作$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.



2. 特殊情况:(1)当 $\theta=$________时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;当 $\theta=$________时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

(2)向量垂直:如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是________,我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作________.

【诊断分析】1. (1)已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,则向量 $2\boldsymbol{a}$ 与 $-3\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

(2)在等边三角形 ABC 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

2. 向量的夹角的几何意义是什么?向量的夹角的取值范围是什么?

◆ **知识点二　向量的数量积**

条件	已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 θ
结论	数量________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)
记法	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________
规定	零向量与任一向量的数量积为________

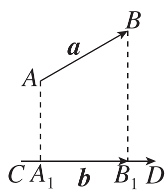
【诊断分析】 1. (1)"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$"是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角"的________条件.

(2)"$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"是"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$"的________条件.(用"充分不必要""必要不充分""充要"或"既不充分也不必要"填空)

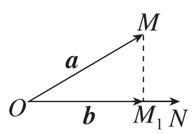
2. 向量的数量积与向量的数乘的区别是什么?

◆ **知识点三　向量 a 在 b 上的投影向量**

1. 投影与变换:如图,设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$,过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B,分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$,称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$________,$\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的________.



2. 投影向量的定义:如图,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$,过点 M 作直线 ON 的垂线,垂足为 M_1,则 $\overrightarrow{OM_1}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的________.



3. 计算:设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为________.

◆ **知识点四　数量积的性质**

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,它们的夹角是 θ,$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量,则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$________.

(3)当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_,\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{b}\text{ 同向},\\ \_\_\_\_\_\_\_\_,\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{b}\text{ 反向}.\end{cases}$

特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,当且仅当________时等号成立.

(5)$\cos\theta=$________.

【诊断分析】 1. 若 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{e}|=1$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $30°$,则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为________.

2. 下列说法中正确的是________.(填序号)

①对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;

②若 $|\boldsymbol{a}|=2$,则 $\boldsymbol{a}^2=4$;

③设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$"的充要条件是"$\cos\theta>0$".

课中探究

考点探究　素养小结

◆ **探究点一　向量的夹角**

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角是多少? $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角又是多少?

◆ **探究点二　平面向量的数量积**

例 2 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=5$,分别求下列条件下 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

(3)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$.

变式 (1)已知$|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$,则$|\boldsymbol{b}|=$________.

(2)已知A,B两点在圆C上运动,若$AB=\sqrt{2}$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ________.

[素养小结]

求平面向量数量积的步骤:(1)求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角θ,$\theta\in[0,\pi]$;(2)分别求$|\boldsymbol{a}|$和$|\boldsymbol{b}|$;(3)求数量积,即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$,要特别注意书写时$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间用实心圆点"$\cdot$"连接,不能用"$\times$"连接,也不能省去.

◆ 探究点三 平面向量的投影向量

例3 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=1$,向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$,求:

(1)向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量;

(2)向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量.

变式 (1)已知等边三角形ABC的边长为2,则向量$\overrightarrow{AB}$在向量$\overrightarrow{CA}$上的投影向量为 ( )

A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

C. $2\overrightarrow{AC}$　　D. $2\overrightarrow{CA}$

(2)已知$|\boldsymbol{b}|=3$,若$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ( )

A. 3　　B. $\frac{9}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

(3)若$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=4$,向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$,与$\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量为$\boldsymbol{e}$,则向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为________.

[素养小结]

求投影向量的方法

(1)向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量的计算公式为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$,其中$\theta$为向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的夹角,向量$\boldsymbol{e}$为与向量$\boldsymbol{b}$同方向的单位向量,即$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量是一个向量,且与$\boldsymbol{b}$共线,其方向由向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$的余弦值的正负决定.

(2)向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$;向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

◆ 探究点四 平面向量数量积的基本性质

例4 给出以下结论:

①$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$;

②若$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$共线,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;

③$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$;

④已知$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$是三个非零向量,若$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$;

⑤$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

⑥若非零向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为锐角.

其中正确结论的个数为 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

变式 已知$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$是三个非零向量,则下列说法中正确的个数为 ( )

①若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

②若$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$反向共线,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$;

③若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

④若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

[素养小结]

对于这类概念、性质、运算律的问题的解答,关键是要深刻理解相关知识,特别是那些易与实数运算相混淆的运算律,如消去律、乘法结合律等,当然还有向量的数量积中有关角的概念以及数量积的性质等.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 在正六边形$ABCDEF$中,向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$的夹角为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. ［2024·北京六十五中测试］已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模分别为 2 和 3，且夹角为 60°，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 （ ）

A. -3 B. 3

C. $-3\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

3. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，则“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线”的 （ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，且 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模为________.

5. 若 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

第 2 课时　向量数量积的运算律

【学习目标】

理解平面向量数量积的运算律，会用数量积判定两个平面向量的垂直关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　数量积的运算律**

对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________(交换律).

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=$________$=$________(数乘结合律).

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$____________(分配律).

◆ **知识点二　数量积运算的常用公式**

多项式乘法	向量数量积
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=$____________________

向量数量积的常用结论：

(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$.

(2)$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3)$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时右边等号成立，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时左边等号成立.

【诊断分析】下列说法正确的是________.(填序号)

①$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$；

②$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；

③$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　向量数量积的运算律**

例 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共线的非零向量，则下列结论不正确的是 （ ）

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

B. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直

C. $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

D. $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$

变式 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是非零向量，则“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”的 （ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

◆ **探究点二　求向量的数量积**

例 2 (1)已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，求 $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

(2)在△ABC 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值.

变式 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ ( )

A. $\frac{17}{2}$　　B. $\frac{15}{2}$

C. $-\frac{17}{2}$　　D. $-\frac{15}{2}$

(2)[2024·通州期中]已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$________.

[素养小结]

(1)求两个向量的数量积,应首先确定两个向量的模及其夹角,其中确定两个向量的夹角是求数量积的关键.

(2)根据数量积的运算律,向量的加、减与数量积的混合运算类似于多项式的乘法运算.

◆ 探究点三　向量模、夹角的计算问题

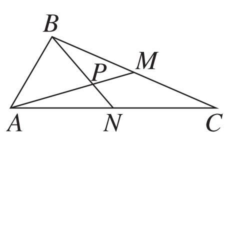
例 3 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=1$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.

(1)求 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角.

变式 (1)非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$,若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

(2)如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=2$,$AC=5$,$\angle BAC=60°$,BC,AC 边上的中线 AM,BN 相交于点 P,求 $|\overrightarrow{AP}|$.



[素养小结]

求平面向量的模和夹角时要注意数量积运算律的正确运用,在解决与图形有关的模与夹角问题时要注意选择合适的向量表示及公式的正确计算.

(1)向量的模:利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ 来求解.

(2)向量的夹角:利用公式 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 求出夹角的余弦值,从而求得夹角.

◆ 探究点四　两个非零向量的垂直问题

例 4 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为两个单位向量,且 $\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle=\frac{2\pi}{3}$,若 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 与 $3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$ 垂直,则 $\lambda=$________.

变式 [2024·房山期中]若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ( )

A. $\frac{\pi}{3}$　B. $\frac{\pi}{6}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$

[素养小结]

解决与垂直有关的问题时要利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量).

拓展 [2024·通州期中]已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和正实数 t,满足 $|\boldsymbol{a}|=4$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,且 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最小值为________.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $-\frac{1}{3}$,$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,则 $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$ ( )

A. -23　　B. 23

C. -27　　D. 27

2. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 垂直,则实数 $\lambda=$ ( )

A. $2\sqrt{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. $\sqrt{2}$　D. 2

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$D$ 是 BC 的中点,$|\overrightarrow{AB}|=2$,则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值为 ( )

A. 1　B. 2　C. -1　D. -2

4. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,那么 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$________.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=1$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.